Une formule de Bouchet pour un manteau neigeux clairsemé ?

Simon Gascoin, Gilles Boulet

Une formule de Bouchet pour un manteau neigeux clairsemé ?

Simon Gascoin, Gilles Boulet

Janvier 2012

Ce document est une ébauche pour transposer le concept proposé par Bouchet (1963) du calcul de l'évapotranspiration au calcul de l'ablation des surface partiellement enneigées.

1 Hypothèse de Bouchet

1.1 Evapotranspiration des surfaces non-enneigées

Soit une surface homogène non-enneigée de 10 à 100 ha : on note E l'évapotranspiration réelle (ETR), E_p l'évapotranspiration potentielle (ETP). Si la surface est suffisament humide alors :

$$E = E_p = E_{p0} \tag{1}$$

E_{p0} désigne la valeur de l'évapotranspiration potentielle dans ce cas. Si l'eau disponible devient un facteur limitant alors E diminue en dessous de E_{p0}, ce qui libère une quantité d'énergie Q non utilisée pour l'évapotranspiration.

$$E_{p0} - E = Q \tag{2}$$

Bouchet (1963) fait l'hypothèse que Q va directement accroitre l'évapotranspiration potentielle (e.g. par réchauffement ou assèchement des basses couches de l'atmosphère) :

$$E_p = E_{p0} + Q \tag{3}$$

Les equations 2 et 3 permettent d'écrire la formule de Bouchet :

$$E_p + E = 2E_{p0} \tag{4}$$

Cette relation a été validée et largement utilisée pour estimer l'évapotranspiration (modèle “advection aridity” Brutsaert et Stricker, 1979; Parlange et Katul, 1992).

1.2 Surfaces partiellement enneigées

Soit E (W/m^2) l'énergie reçue par unité de surface sur une zone partiellement enneigée ("patchy snow cover"). L'ablation de la neige A (fonte et sublimation, kg/m^2/s ou mm w.e./s) s'écrit

$$A = kE \tag{5}$$

où k est un coefficient de conversion de l'énergie reçue en hauteur d'eau (combinaison chaleur latente de sublimation et fusion). Par ailleurs l'ablation est la variation de la hauteur de neige $h(x,y)$ (mm w.e.) :

$$A(x,y) = -\frac{dh}{dt} \tag{6}$$

Si le système étudié est une zone "oasis", les échanges de chaleur d'échelle inférieure au système sont "de simples mouvements d'uniformisation" (Bouchet, 1963). On peut donc appliquer le concept d'advection (Brutsaert et Stricker, 1979), ce qui signifie que l'énergie non utilisée pour l'ablation de la neige au-dessus des surfaces dépourvues de neige est intégralement disponible pour l'ablation des surfaces enneigées dans ce même système. Selon Bouchet (1963) cette surface doit être plane et d'une dimension de l'ordre de 10 à 100 ha. Le surplus d'énergie est alors réparti uniformément au sein des surfaces enneigées. Soit S la surface enneigée et S_0 la surface totale de la zone considérée. On a alors :

$$-\frac{dh}{dt} = kE\frac{S_0}{S} \tag{7}$$

1.3 Cas du prisme de neige

On considère un prisme de neige (Figure 2). En $t = 0$ la neige couvre toute la surface i.e. un carré de côté L. La hauteur maximale est h_m. L'angle avec la surface est a. La surface enneigée est :

$$S = \frac{Lh_m}{\sin(a)} \tag{8}$$

D'après l'équation 7 l'ablation s'écrit :

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{kES_0\sin(a)}{Lh_m} \tag{9}$$

Comme A est uniforme on peut écrire l'équation différentielle :

$$-\frac{dh}{dt} = -\frac{dh_m}{dt} = \frac{kES_0\sin(a)}{Lh_m} \tag{10}$$

En remplaçant h_m d'après Eq. 8 :

$$-\frac{dS}{dt} = \frac{kELS_0}{S\sin(a)} \tag{11}$$

Après intégration (E est constant) :

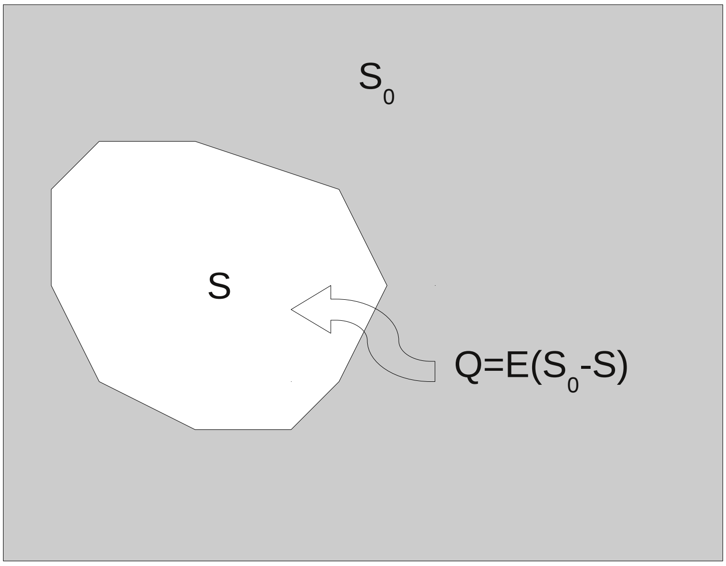

FIGURE 1: Advection d'énergie vers les surfaces enneigées

$$S(t) = \sqrt{S_0^2 - 2kES_0Lt/\sin(a)} \tag{12}$$

La figure 3 montre que l'advection d'énergie accélère la réduction de la surface enneigée.

1.4 Cas d'une distribution aléatoire de neige

On considère une distribution aléatoire de la hauteur de neige $h(x, y)$ sur un carré de côté L. Soit f la densité de probabilité $P(h \leq x)$ et F sa fonction de répartition. La surface enneigée S est donnée par la probabilité que la hauteur de neige $h(x, y)$ soit positive (ici on négligle les effets du relief dans le calcul de l'aire enneigée, contrairement au cas précédent).

$$\begin{aligned} S &= P(h > 0) && (13) \\ &= 1 - P(h \leq 0) && (14) \\ &= 1 - F(0) && (15) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} f(x) dx dy && (16) \end{aligned}$$

Si le manteau neigeux a subi une ablation uniforme égale à H, alors la surface enneigée est :

$$S(H) = P(h > H) \tag{17}$$

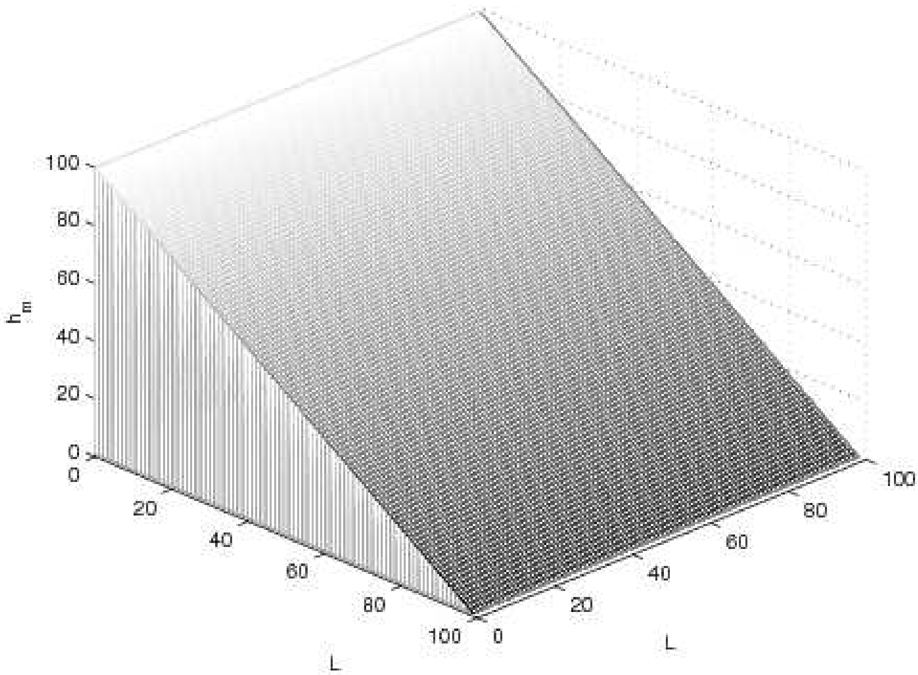

FIGURE 2: Exemple d'un prisme de neige (ici a=45°)

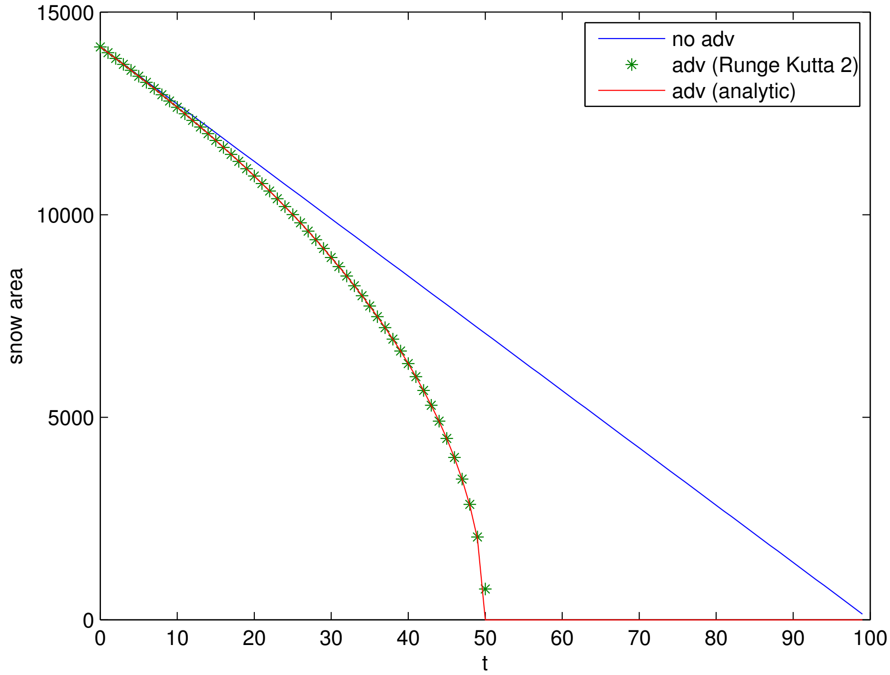

FIGURE 3: *no adv* : Résolution de l'équation 5 ; *adv* : Résolution de l'équation 10 par méthode analytique ou numérique. Paramètres $E = 1$, $k = 1$, $a = 45^{\circ}$, $L = 100$.

$$= \quad 1 - F(H) \tag{18}$$

Il suffit donc de connaitre la fonction de répartition de la densité de probabilité choisie pour connaitre l'aire enneigée. Par exemple, on choisit une distribution log-normale ayant comme paramètres μ et σ (Figure 4). Cette distribution représente généralement bien les observations de hauteur de neige. Sa fonction de répartition est donnée par :

$$F(H) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left[-\frac{\ln H - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right]. \tag{19}$$

On peut donc résoudre analytiquement les équations différentielles qui décrivent l'évolution de la surface enneigée avec ou sans advection (equations 5 et 7). Pour cela utilise la variable $H(t)$ (ablation cumulée à la date t) qui se définit comme la différence entre la hauteur maximale h_m entre t et $t = 0$:

$$H = h_m(0) - h_m(t) \tag{20}$$

Comme l'ablation est uniforme

$$-\frac{dh}{dt} = -\frac{dh_m}{dt} = \frac{dH}{dt} \tag{21}$$

D'où : sans advection :

$$\frac{dH}{dt} \quad = \quad kE \tag{22}$$

avec advection :

$$\frac{dH}{dt} \quad = \quad kE\frac{S_0}{S(H)} \tag{23}$$

La figure 5 montre la résolution de ces équations et illustre l'accélération théorique de la réduction de surface avec le temps en cas d'advection.

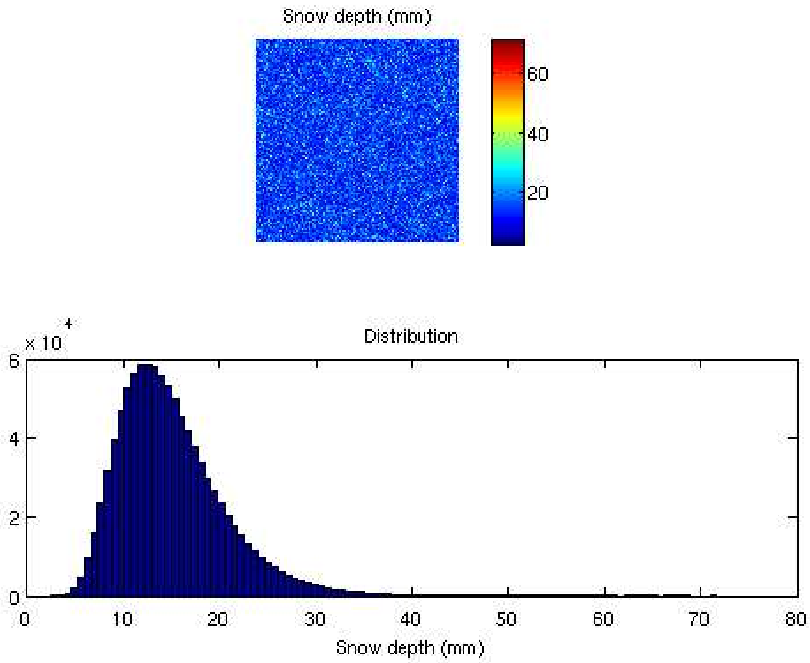

FIGURE 4: Distribution log-normale (moyenne 15, variance 30) de la hauteur de neige sur un carré de côté $L = 100$

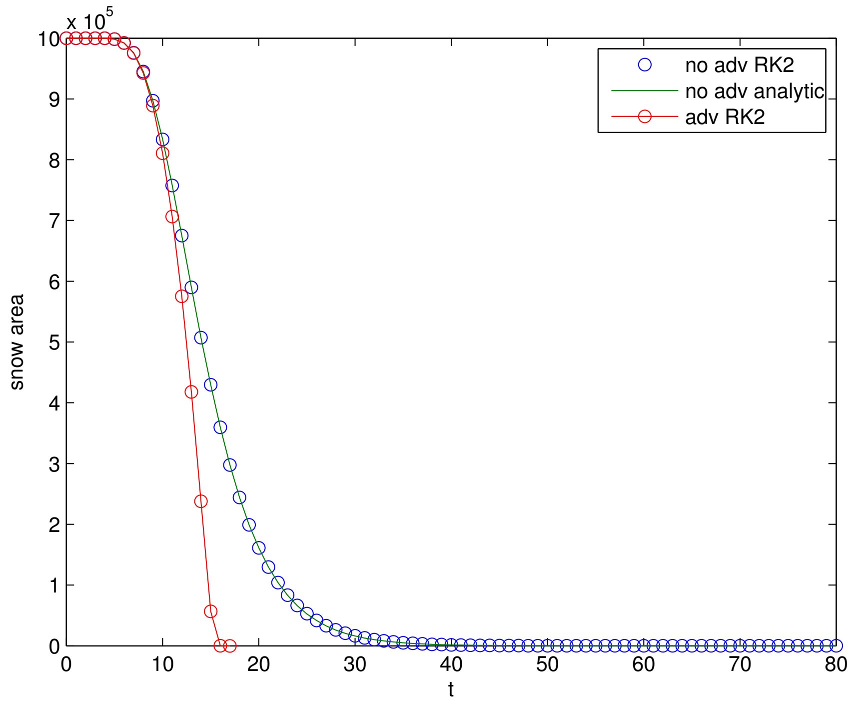

FIGURE 5: Evolution de la surface enneigée avec (*adv*) ou sans (*no adv*) advection. *no adv RK2/analytic* : Résolution de l'équation 22 par méthode numérique (Runge Kutta 2e ordre) ou analytique ; *adv* : Résolution de l'équation 23 par méthode numérique. Paramètres $E = 1$, $k = 1$, $a = 45^{\circ}$, $L = 1000$.

Références

Bouchet, R. (1963). Evapotranspiration réelle et potentielle, signification climatique. *IAHS Pub.*, 62:134–142.

Brutsaert, W. et Stricker, H. (1979). An advection-aridity approach to estimate actual regional evapotranspiration. *Water Resour. Res*, 15(2):443–450.

Parlange, M. et Katul, G. (1992). An advection-aridity evaporation model. *Water Resour. Res*, 28(1):127–132.